Enseignant: Mathieu Huruguen
Algèbre linéaire - CMS
16 juin 2023
Durée : 105 minutes

X

Contrôle 4 (énoncé)

SCIPER : **XXXXXX**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 12 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre **carte d'étudiant.e** sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout **outil électronique** est **interdite** pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix unique**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen

ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen

Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Première partie, questions à choix unique

Pour chaque énoncé proposé, plusieurs questions sont posées. Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Enoncé

On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,,\ (x, y, z) \to (2x - 7y + 5z, -4x + 3y - 4z, -11x + 16y - 14z)\,.$$

Question 1 *(1 point)* Parmi les éléments suivants de $\mathbb{R}^3$, un seul est vecteur propre de f. Lequel ?

☐ $(1, 0, 1)$ ☐ $(0, 1, 1)$ ☐ $(1, 0, -1)$ ☐ $(-1, 1, 0)$

Question 2 *(2 points)* Combien f possède-t-elle de valeur(s) propre(s) ?

☐ 2 ☐ 3 ☐ 0 ☐ 1

Question 3 *(2 points)* Parmi les affirmations suivantes, une seule est vraie. Laquelle ?

☐ f est diagonalisable

☐ f n'est pas diagonalisable, mais elle est diagonalisable par blocs

☐ f n'est pas diagonalisable par blocs

☐ f est diagonalisable, mais elle n'est pas diagonalisable par blocs

Enoncé

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^5$ on donne :

$$v_1 = (-4, 4, -1, -2, 3)\,,\ v_2 = (5, -9, 4, 1, -1)\,,\ v_3 = (1, -5 - 2\alpha, 3 + \alpha, -1, 2 + \alpha),$$

où v_3 dépend du paramètre réel $\alpha \in \mathbb{R}$. On donne aussi le sous-espace vectoriel :

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 - x_3 + x_5 = 0\}.$$

Question 4 *(1 point)* Pour combien de valeur(s) de α a-t-on l'inclusion : $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3) \subset V$?

☐ une infinité ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2

Question 5 *(2 points)* Pour combien de valeur(s) de α la famille v_1, v_2, v_3 est-elle liée ?

☐ 2 ☐ 1 ☐ une infinité ☐ 0

Question 6 *(2 points)* Pour combien de valeur(s) de α la famille v_1, v_2, v_3 est-elle génératrice de V ?

☐ 0 ☐ une infinité ☐ 2 ☐ 1

Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Sauf mention explicite du contraire, votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 7: *Cette question est notée sur 6 points.*

0 .5 1 .5 2 .5 3 .5 4 .5 5 .5 6

On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \to (-x + 27y - 85z, 3x - 81y + 255z, x - 27y + 85z)$$

dont on note A la matrice en base canonique.

(a) L'application f est-elle diagonalisable ? Si oui, en donner une base propre.

(b) Montrer que le sous-ensemble de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ suivant :

$$W = \{B \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}) \mid AB = 3B\}$$

est un sous-espace vectoriel et en déterminer une famille génératrice (finie).

(c) Représenter sur un croquis ci-dessous les sous-espaces propres de f ainsi qu'un point (x, y, z) et son image $f(x, y, z)$ par f.

Question 8: *Cette question est notée sur 9 points.*

☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5
☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9

Dans $M_3(\mathbb{R})$, on donne les deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -8 & 10 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & -10 & 15 \\ 5 & 11 & -15 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

On note aussi $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ les applications linéaires de matrices respectives A et B en base canonique.

(a) Déterminer la nature géométrique de g et ses éléments caractéristiques.

(b) Montrer que le plan vectoriel $\operatorname{Im} g$ est stable par f. En déduire une valeur propre de f.

(c) Déterminer une base $\mathcal{B}$ telle que la matrice $[f]_{\mathcal{B}}$, que l'on calculera, est diagonale par blocs.

(d) Dans l'espace vectoriel $M_3(\mathbb{R})$, déterminer si la famille :

$$A,\ A^2,\ B,\ I_3 - B$$

est libre ou liée. *Indication : on pourra utiliser les résultats du (c) et calculer la matrice* $[g]_{\mathcal{B}}$.